МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный экономический университет»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Направление подготовки	01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Направленность (профиль) программы	Прикладная математика и информатика в экономике и управлении
Уровень высшего образования	Бакалавриат
Форма обучения	очная

Санкт-Петербург
2020

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ И ЭТАПЫ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ 3

2. СТРУКТУРА ФОС ПО ДИСЦИПЛИНЕ 3

3. ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ 6

4. ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА 8

5. ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ 9

5.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ: 9

5.2. КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ БРС 10

5.3. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ 15

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ 17

7. ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ 18

7.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ 21

7.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ 21

Приложение:

Контрольно-оценочные средства

1. Перечень компетенций и этапы их формирования в процессе освоения дисциплины

Фонд оценочных средств предназначен для оценки результатов обучения по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Рабочей программой дисциплины предусмотрено формирование следующих компетенций:

Таблица – 1.1.1. Перечень формируемых дисциплиной компетенций

Категория (группа) компетенций	***Код и наименование компетенции***	***Код и наименование индикаторов достижения компетенции***
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.6. Способен применять в профессиональной деятельности фундаментальные знания теории вероятностей и математической статистики

2. Структура ФОС по дисциплине

Проведение оценки осуществляется путем сопоставления продемонстрированных обучающимся результатов освоения компетенций с заданными критериями.

Для положительного заключения по результатам оценочной процедуры по учебной дисциплине установлено пороговое значение показателя, при котором принимается положительное решение, констатирующее результаты освоения дисциплины.

Таблица – 2.1. Объекты оценивания и наименование оценочных средств

Номер и наименование тем *и/или разделов/тем*	**Формы текущего контроля успеваемости/ Формы промежуточной аттестации**	**Объекты оценивания**	**Вид занятия / Наименование оценочных средств**	**Форма проведения оценки** **Устная/ письменная**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Тема 1. Статистический, геометрический	Текущий контроль	Схема равновозможных исходов	ПЗ: Решение практических задач	письменная

и классический подходы к теории вероятностей		Геометрическая вероятность		
Тема 2. Аксиоматическое определение вероятности	Текуший контроль	Алгебры и сигма-алгебры событий	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 3. Условная вероятность. Независимость	Текуший контроль	Условная вероятность Формула полной вероятностей и теорема Байеса Независимость Схем Бернулли Предельные теоремы для схемы Бернулли	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 1-3	Контрольная точка №1	Тема 1-3	Контрольная работа	письменная
Тема 4. Случайные величины и способы их описания	Текуший контроль	Функция распределения Плотность распределения Закон распределения	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 5. Случайные вектора и способы их описания	Текуший контроль	Многомерная функция распределения Многомерная плотность распределения Многомерный закон распределения	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 6. Характеристики случайных величин	Текуший контроль	Математическое ожидание Дисперсия Квантили Ковариация Коэффициент корреляции	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 4-6	Контрольная точка №2	Тема 1-6	Контрольная работа	письменная
Тема 7. Производящие функции	Текуший контроль	Производящая функция вероятностей Производящая функция моментов	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 8. Избранные распределения	Текуший контроль	Распределение Бернулли Биномиальное распределение Геометрическое распределение Распределение Пуассона	ПЗ: Решение практических задач	письменная

		Равномерное распределение Экспоненциальное распределение Нормальное распределение		
Тема 9. Избранные теоремы теории вероятностей	Текущий контроль	Центральная предельная теорема	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 10. Условные распределения и условные характеристики	Текущий контроль	Условные распределения	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Темы 1-10	**Промежуточная аттестация**	Обобщенные результаты обучения по дисциплине теоретических знаний и практических навыков	Вопросы к экзамену	Устная
Тема 11. Случайная выборка	Текущий контроль	Эмпирическая функция распределения Эмпирическая плотность распределения Выборочные моменты	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 12. Оценка параметров	Текущий контроль	Метод максимального правдоподобия Метод моментов	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 13. Доверительные интервалы. Проверка гипотез	Текущий контроль	Гипотеза о математическом ожидании Гипотеза о дисперсии Гипотеза о распределении Доверительные интервалы	ПЗ: Решение практических задач	письменная
Тема 11-13	Контрольная точка №1	Тема 11-13	Контрольная работа	письменная
Тема 14. Простая линейная регрессия	Текущий контроль	Линейная модель. Оценка параметров линейной модели с помощью метода наименьших квадратов. Свойства оценок. Предпосылки линейной модели и	ПЗ: Решение практических задач	письменная

		их проверка. Теорема Гаусса-Маркова		
Тема 14	Контрольная точка №2	Тема 14	Контрольная работа	письменная
Темы 10-14	**Промежуточная аттестация**	Обобщенные результаты обучения по дисциплине теоретических знаний и практических навыков	Вопросы к экзамену	Устная
Итоговый контроль по дисциплине	-	Вопрос 1. Теорема Гаусса-Маркова Вопрос 2. Примеры использования метода максимального правдоподобия Вопрос 3. Критерий хи-квадрат	Вопросы к ГИА	-

3. Показатели и критерии оценки компетенций

Оценка знаний, умений, владений может быть выражена в параметрах *«очень высокая», «высокая»*, соответствующая академической оценке *«отлично»; «достаточно высокая», «выше средней»,* соответствующая академической оценке *«хорошо»*; «*средняя», «ниже средней», «низкая»,* соответствующая академической оценке *«удовлетворительно»; «очень низкая»,* соответствующая академической оценке *«неудовлетворительно».*

Таблица – 3.1. Текущий контроль

№	Виды работ	Критерии оценивания			
		Отсутствует компетенция	**Базовый уровень освоения компетенции**	**Повышенный уровень освоения компетенции**	**Продвинутый уровень освоения компетенции**
1	Работа на лекциях	Отсутствие участия студента в работе на занятии	Единичное высказывание	Высказывание суждений, активное участие в работе на занятии	Высказывание неординарных суждений, активное участие в работе на занятии
2	Работа на практических/семинарских занятиях	Выполнено менее 54%	Выполнено выше 54% до 69 %	Выполнено от 70% до 84 %	Выполнено выше 85%

3	Работа на практических занятиях, решение общих практических задач	Отсутствие участия в обсуждении, решении, неправильное решение	Единичное высказывание, решение с ошибками	Высказывание суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение с отдельными замечаниями	Высказывание неординарных суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение без ошибок
4	Работа на практических занятиях, решение индивидуальных практических задач	Отсутствие участия в обсуждении, решении, неправильное решение	Единичное высказывание, решение с ошибками	Высказывание суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение с отдельными замечаниями	Высказывание неординарных суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение без ошибок

Критерии оценивания формулируются для каждой компетенции и отражают опознаваемую деятельность обучающегося, поддающуюся измерению.

Таблица – 3.2. Обобщенные критерии оценивания освоения компетенции:

1	**2 (балл 54)**	**3 (балл 55-69)**	**4 (балл 70-84)**	**5 (балл 85-100)**
Отсутствует компетенция	Отсутствует компетенция	Базовый уровень освоения компетенции	Повышенный уровень освоения компетенции	Продвинутый уровень освоения компетенции
Компетенция не освоена. Студент не владеет необходимыми знаниями.	Компетенция не освоена. Обучающийся частично показывает знания, входящие в состав компетенции, понимает их необходимость, но не может их применять.	Компетенция освоена. Обучающийся показывает общие знания, входящие в состав компетенции, имеет представление об их применении, умение извлекать и использовать основную (важную) информацию из полученных знаний	Компетенция освоена. Обучающийся показывает полноту знаний, демонстрирует умения и навыки решения типовых задач.	Компетенция освоена. Обучающийся показывает глубокие знания, демонстрирует умения и навыки решения сложных задач, умение принимать решения, создавать и применять документы, связанные с профессиональной деятельностью; способен

1	2 (балл 54)	3 (балл 55-69)	4 (балл 70-84)	5 (балл 85-100)
Отсутствует компетенция	Отсутствует компетенция	Базовый уровень освоения компетенции	Повышенный уровень освоения компетенции	Продвинутый уровень освоения компетенции
				самостоятельно решать проблему/задачу на основе изученных методов, приемов и технологий.

Базовый уровень освоения компетенций - обязательный для всех обучающихся по завершении освоения дисциплины.

Повышенный уровень освоения компетенций - превышение минимальных характеристик сформированности компетенции для обучающегося.

Продвинутый уровень освоения компетенций - максимально возможная выраженность компетенции, важен как качественный ориентир для самосовершенствования так и дополнительное к требованиям ОПОП освоение компетенций с учетом личностных характеристик:

- активное участие в конференциях, конкурсах, круглых столах и т.д. с получением зафиксированного положительного результата по вопросам, включенным в дисциплину;
- разработка и реализация проектов с применением компетенций, указанных в рабочей программе;
- демонстрирует умение применять теоретические знания для решения практических задач повышенной сложности и нестандартных задач;
- выполнение в срок всех поставленных задач.

4. Шкала оценивания результата

Таблица – 4.1. Шкала критериев оценивания компетенций

Оценка	Содержание
1 2 (балл до 54)	Демонстрирует непонимание проблемы. Многие требования, предъявляемые к заданию не выполнены. Демонстрируется первичное восприятие материала. Работа незакончена и /или это плагиат.
3 (балл 55-69)	Демонстрирует частичное понимание проблемы. Большинство требований, предъявляемых, к заданию выполнены. Владение элементами заданного материала. В основном выполненный материал понятен и носит целостный характер.
4 (балл 70-84)	Демонстрирует значительное понимание проблемы обозначенной дисциплиной. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены. Содержание выполненных заданий раскрыто и рассмотрено с разных точек зрения.
5 (балл 85-100)	Демонстрирует полное понимание проблемы. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены.

	Продемонстрировано уверенное владение материалом дисциплины. Выполненные задания носят целостных характер, выполнены в полном объеме, структурированы, представлены различные точки зрения, продемонстрирован творческий подход.

Шкалы оценивания и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине регламентируются Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования и Положением о балльно-рейтинговой системе.

Для оценки сформированности результатов обучения по дисциплине используется **традиционная форма аттестации/ балльно-рейтинговая система успеваемости обучающихся**:

Формой итогового контроля по дисциплине является *экзамен/ зачет с оценкой,* итоговая оценка формируется в соответствии со шкалой, приведенной ниже в таблице:

Баллы	Оценка
<55	неудовлетворительно
<70	удовлетворительно
<85	хорошо
≥85	отлично

5. Перечень заданий по дисциплине

5.1. Задания для текущего контроля:

Таблица - 5.1.1. Перечень заданий текущего контроля и их наименование

Наименование оценочных средств	**Содержание задания**
Решение практических задач	Темы задач: Комбинаторика Геометрическая вероятность Условная вероятность, независимость событий Формула полной вероятности, Теорема Байеса Случайные величины и их описание Случайные вектора и их описание Характеристики случайных величин Центральная предельная теорема Избранные распределения Условные распределения Эмпирическая функция распределения и эмпирическая плотность распределения Выборочные моменты Метод максимального правдоподобия Доверительные интервалы Проверка гипотез

5.2. Контрольные точки БРС

Первая контрольная точка четвертого семестра в форме контрольной работы – пример (письменная).

Задание:

I. 1. (70%) Выразить $P(A_1 \bigcup A_2 \bigcap \overline{A}_3 \bigcup A_4)$ через вероятности событий A_1, A_2, A_3, A_4 и их всевозможных пересечений, если события A_1 и A_4 не пересекаются.

2. (85%) Определить количество элементов в минимальной сигма-алгебре, содержащей события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, если никакие четыре события из A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 не пересекаются.

3. (100%) Гардеробщица в театре для скорости сначала раздала людям номерки, а потом случайным образом развесила пальто. Найти вероятность того, что хотя бы одно пальто будет висеть на месте, совпадающим с номерком хозяина пальто.

II. 1. (70%) Цифры от 0 до 9 написаны на десяти карточках. Обезьянка случайным образом четыре раза достаёт карточку, запоминает цифру и возвращает карточку на место. Найти вероятность того, что с помощью цифр, которые запомнила обезьянка, можно записать два числа, каждое из которых а) делится на 5, б) делится на 3. Каждую цифру можно использовать только раз, требуется использовать все цифры. Решить задачу в случае, если бы обезьянка не возвращала карточки на место.

2. (85%) Обезьянка находится в левом нижнем углу доски $m \times n, m < n.$ Каждую секунду обезьянка делает шаг либо вправо, либо вверх. Если она уже находится в верхнем (или правом) ряду, то она просто двигается вправо (соответственно, вверх). Найти вероятность того, что обезьянка хотя бы раз сделает подряд два шага вверх.

3. (100%) Пусть $\varphi(n)$ - количество целых, положительных чисел, меньших n и взаимнопростых с ним. Доказать, что $\varphi(n) = n\prod(1-\frac{1}{p}),$ где произведение берётся по всем простым делителям n (т.е. – p простые делители n).

III. 1. (70%) Наугад выбираются две точки из отрезка. Найти вероятность того, что левая точка будет ближе к левому к концу отрезка, чем к правой точке.

2. (85%) Наугад выбираются три точки из окружности. Найти вероятность того, то расстояние между двумя ближайшими из них будет минимум в два раза меньше, чем расстояние между двумя, находящимися на наибольшем расстоянии.

3. (100%) Объяснить, каким образом нужно выбирать случайную хорду в задаче Бертрана, чтобы получать ответы отличные от 1/2, 1/3, 1/4.

IV. 1. (70%) Два человека играют в азартную игру до десяти побед, при этом первый выигрывает в одной игре с вероятностью 0.6, а второй с вероятностью 0.4. При счёте 8:6 игры пришлось прервать. Определите, в какой пропорции следовало бы поделить призовой фонд.

2. (85%) Решите предыдущую задачу в общем случае и исследуйте асимптотику ответа при $n \to \infty$ если бы игра велась не до десяти побед, а до n побед.

3. (100%) Двое игроков играют в азартную игру до тех пор, пока один из них не разорится. В начальный момент у первого игрока a рублей, у второго b рублей, проигравший отдаёт выигравшему один рубль. Первый выигрывает с вероятностью $p,$ второй с вероятностью $q,$ ничья с вероятностью $1-p-q.$ Найти вероятность разорения каждого из игроков. Объяснить, какая игра предпочтительнее для игроков, допускающая ничьи или нет (т.е. $p+q=1$).

V. 1. (70%) Два орудия стреляют по двум целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом. Орудие попадет в цель с вероятностью $p.$ Определить вероятность того, что из двух целей поражена будет ровно одна.

2. (85%) Двое игроков играют в азартную игру до тех пор, пока один из них не разорится. В начальный момент у первого игрока a рублей, у второго b рублей, проигравший отдаёт выигравшему один рубль. Первый выигрывает с вероятностью $p,$ второй с вероятностью $q,$ ничья с

вероятностью $1-p-q$. Найти вероятность разорения каждого из игроков. Объяснить, какая игра предпочтительнее для игроков, допускающая ничьи или нет (т.е. $p+q=1$).

3. (100%) Наугад выбираются две точки из квадрата, стороны которого параллельны осям координат. Найти вероятность того, что сумма модуля разности абсцисс этих точек и модуля разности ординат этих точек (расстояние Манхэттен) будет меньше, чем расстояние от первой точки до ближайшей границы квадрата.

VI. 1. (70%) В урну, содержащую 100 шаров, положили красный шар, а потом достали красный шар. Найти вероятность того, что в урне было 48 красных шаров.

2. (85%) В условиях задачи V.1 первая цель была поражена только одна цель. Найти вероятность того, что орудия стреляли по разным целям.

3. (100%) Решить предыдущую задачу при условии, что рассматривается три орудия и три цели, а требуется найти вероятность того, что орудия стреляли ровно в две цели, если была поражена ровно одна.

VII.

1. (70%) Ценная бумага стоит 1000$. Каждый день она может с равными вероятностями либо дорожать, либо дешеветь. Найти, при каком n вероятность ценной бумаге через n стоить минимум 1100$ превысит a) 0.4, b) 0.8.

2. (85%) Ценная бумага стоит 1000$. Каждый день она может с равными вероятностями либо дорожать, либо дешеветь. Найти, при каком n вероятность ценной бумаге через n стоить минимум 1100$ превысит a) 0.4, b) 0.8. Исследовать асимптотику превышения 1100$ при $n \to \infty$. При решении пренебрегать тем, что стоимость ценной бумаги не может быть отрицательной. Определить какой-нибудь интервал (не луч), в котором с вероятностью 0.9 будет находиться стоимость ценной бумаги спустя 150 дней.

3. (100%) Ценная бумага стоит 1000$. Каждый день она может либо дорожать на 1%, либо дешеветь на 1%. Определить, с какой вероятностью спустя 150 дней ценная бумага будет стоить более 1050 долларов.

Вторая контрольная точка четвертого семестра в форме контрольной работы – пример (письменная).

Задание:

1. Количество котят, рождающихся у кошки за один раз, может принимать значения 1, 2, 3, 4 с вероятностями 0.1, 0.2, 0.5, 0.2.

Выберите верные утверждения (a-d):

a. если бы вместо чисел 1 и 4 в условии были бы числа 0 и 5, математическое ожидание числа будущих котят не изменилось бы.

b. 80% квантиль числа котят больше 75% квантили числа котят в одном помёте.

c. при некотором другом наборе вероятностей стандартное отклонение числа котят могло бы оказаться равным 4.

d. дисперсия количества котят у четырёх кошек (в предположении о независимости и одинаковой распределённости кошек) больше, чем дисперсия количества котят у кошки, которой предстоит рожать четыре раза (в предположении, что кошка каждый раз будет рожать столько же котят, сколько и в первый).

2. В условиях задачи 1:

a. считая, что у каждого котёнка девять жизней, определить математическое ожидание общего числа жизней будущего потомства (в предположении, что для каждого из будущих котят ближайшая жизнь будет первой);

b. определить стандартное отклонение числа котят в помёте трёх кошек (считая, что кошки независимы и одинаково распределены);

c. определить 99% квантиль суммарного числа котят у двух кошек (считая, что кошки независимы и одинаково распределены);

d. пусть время, требуемое для поиска новых хозяев для котёнка, определяется случайной величиной ζ с плотностью $f_\zeta(x) = ax^2, x \in [1;3]$, единица измерения – месяцы; определить вероятность того,

что спустя два месяца всё потомство уже будет пристроено (котята пристраиваются по отдельности, время, требуемое на поиск котят разных хозяев – независимые, одинаково распределенные случайные величины).

3. Цена тонны некоторого сырья в будущем году у двух поставщиков определяется совместным законом распределением двух случайных величин ξ, η (единица измерения – тысяча $).

$\xi \setminus \eta$	1	1.5	2	2.5
1	0.125	0.2	0.025	0
1.5	0.1	0.15	0.1	0
2	0.025	0.1	0.125	0.05

Выберите верные утверждения (a-d):

a. $P(\xi > 1.5 \mid \eta > 1) > P(\eta > 1.5 \mid \xi > 1)$.

b. $D(2\xi + \eta) = 4D\xi + D\eta$.

c. $E\xi = E\eta$.

d. 92% квантиль случайной величины $\xi + \eta$ равна 4.

4. В условиях задачи 3:

a. найти вероятность того, что цена товара у первого поставщика будет больше, чем у второго;

b. клиент планирует в будущем купить у первого поставщика 15 тонн сырья; найти математическое ожидание выручки поставщика, если его цена точно будет больше 1;

c. каждый из поставщиков планирует произвести по 3 тонны сырья, некоторый клиент планирует купить 5 тонн следующим образом: три тонны он купит у поставщика, предлагающего более низкую цену, а оставшиеся две он купит у второго поставщика; найти математическое ожидание суммы, которая потребуется клиенту;

d. клиент хочет заранее заключить договор со вторым поставщиком о поставке трёх тонн в следующем году на следующих условиях: если цена будет больше 1.5, то он купит сырьё по цене 1.75 за тонну, а если 1.5 или меньше – то по актуальной цене; определить, сколько стоит заплатить поставщику сейчас, чтобы он согласился заключить подобный договор (в качестве критерия используется математическое ожидание).

5. Время между извержениями вулкана определяется случайной величиной с плотностью распределения $f_\xi(x) = 4e^{-4x}, x, x > 0,$ единица измерения – год. Временные промежутки между соседними извержениями – независимые, одинаково распределенные случайные величины.

Выберите верные утверждения (a-d):

a. вероятность того, что следующего извержения придется ждать не менее двух лет меньше, чем вероятность того, что следующего извержения придется ждать не менее четырёх лет.

b. вероятность того, что за год произойдёт минимум одно извержение больше, чем вероятность того, что за год не произойдёт ни одного извержения.

c. количество извержений в течение года может быть сколь угодно большим.

d. вероятность того, что извержение произойдёт в течение ближайших 10 дней будет тем больше, чем больше времени прошло с момента предыдущего извержения.

6. В условиях задачи 5:

a. пусть для восстановления экосистемы, повреждённой извержением, требуется год, в случае же если система не успела восстановиться до следующего извержения она погибает окончательно; найти вероятность того, что к третьему извержению экосистема будет уже мертва;

b. найти стандартное отклонение времени между двумя землетрясениями;

c. найти математическое ожидание времени между вторым и четвёртым извержением;

d. найти медиану времени между вторым и четвёртым извержением;

7. Совместное распределение величины будущего мирового урожая зерна по итогам года (ξ, млн тонн) и цены за тонну в этом году (η, тыс. долларов) определяется плотностью

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = a(x + y - 4)^2, x \in [1;3], y \in [1;3].$$

Выберите верные утверждения (a-d):

a. возможно, что за две тонны удастся выручить более пяти млн долларов.

b. $F_{\xi,\eta}(3;2) < F_{\xi,\eta}(4;1.5)$.

c. $D\xi < \sigma(\xi)$.
d. $E(\xi + \eta) = 4$.
8. В условиях задачи 7:
a. найти вероятность того, что два года подряд урожай превысит 1.5 млн тонн, если урожай в разные года – независимые, одинаково распределенные случайные величины;
b. мелкий фермер планирует собрать десять тонн зерна; найти математическое ожидание суммы, которую ему удастся получить;
c. найти дисперсию объёма рынка, т.е. общей стоимости произведенного зерна;
d. найти 95% квантиль объёма рынка, т.е. общей стоимости произведенного зерна.
9.* Для задачи из пункта 7 написать выражение для вычисления $E(\xi \mid \eta = 2)$.

Первая контрольная точка пятого семестра в форме контрольной работы – пример (письменная).

Задание:

1. Выберите верные утверждения:
   a. в отличие от истинной функции распределения, эмпирическая функция распределения обязательно достигает и 0, и 1;
   b. эмпирическая плотность распределения, построенная по выборке из непрерывной случайной величины, не может совпасть с истинной плотностью распределения;
   c. эмпирическая функция распределения однозначно определяется выборкой.
2.
   a. рассматривается выборка объёмом 3 из случайной величины, принимающей значения 0, 1, 2 с равными вероятностями; найти вероятность того, что выборочное среднее совпадёт с истинным математическим ожиданием;
   b. рассматривается выборка объёмом 3 из стандартной нормальной величины; найти вероятность того, что выборочное среднее будет отличаться от истинного ожидания более чем на 0.5;
   c. рассматривается выборка из чисел 0, 1, 3, 3, 3, 4, 3, 2, 5; исследователь использует разбиение с шагом 2, начинающееся в точке -0.5; найти значение выборочной плотности в точке 1.
   d. найти совместное распределение первой и последней порядковых статистик для выборки из непрерывной случайной величины с плотностью *f(x)*.
3. Выберите верные утверждения:
   a. состоятельная оценка не может не быть асимптотически несмещенной;
   b. несмещенная оценка обладает наименьшей дисперсией среди всех возможных оценок;
   c. оценки методом ММП несмещены.
4.
   a. построить несмещенную оценку ковариации двух случайных величин;
   b. выписать функцию правдоподобия для случайной величины, с равными вероятностями равной экспоненциальной с параметром 1 или стандартной нормальной случайным величинам;
   c. написать два варианта для оценки параметра равномерной на [0;a] случайной величины с помощью метода моментов.
5. Выберите верные утверждения:
   a. 57%-квантиль распределения Стьюдента монотонно убывает по числу степеней свободы;
   b. доверительный интервал для дисперсии выборки из нормального распределения не может содержать отрицательные числа;
   c. рассматривается доверительный интервал для отношения двух дисперсий; тогда если все элементы первой выборки увеличить в два раза, доверительный интервал для отношения увеличится;
   d. если в выборку добавить число, совпвадающее с предыдущим выборочным средним, доверительный интервал для дисперсии точно не увеличится;
   e. если число попало в 80% двусторонний доверительный интервал, то оно попадёт и в 90% двусторонний доверительный интервал.
6.
   a. для выборки 4, 2, 4, 3, 1 построить 90% правосторонний доверительный интервал для дисперсии;
   b. рассматриваются две выборки объемом 10 с выборочными ожиданиями 7 и 8 и выборочными дисперсиями 1 и 2; определить, на границу какого двустороннего доверительного интервала попадёт число 0.5;

c. для выборки объёмом 3 из нормальной стандартной величины найти вероятность того, что выборочная дисперсия будет отличаться от истинной более чем на 0.1.

Вторая контрольная точка пятого семестра в форме контрольной работы – пример (письменная).

Задание:

Выберите верные утверждения (1-8):

1. При использовании разных критериев для одной и той же гипотезы может оказаться, что в соответствии с одним критерием гипотеза отклоняется, а в соответствии с другим – нет.
2. Если гипотеза отвергается при 5% уровне значимости, то её p-value больше чем 0.05.
3. Если гипотеза отвергается на 5% уровне значимости, то она отвергается и на 10% уровне значимости.
4. Если коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен 1, то и коэффициент корреляции Пирсона равен 1.
5. Проверяется гипотеза $H_0 : E\xi = a$ при альтернативе $H_1 : E\xi \neq a;$ тогда если при увеличении выборки выборочные характеристики не меняются, p-value будет неубывающей функцией от n.
6. Пусть выборочное среднее оказалось равно 5; тогда p-value для гипотезы $H_0 : E\xi = 4$ при альтернативе $H_1 : E\xi \neq 4$ будет больше, чем для гипотезы $H_0 : E\xi = 5.5$ при альтернативе $H_1 : E\xi \neq 5.5$.
7. По одной и той же выборке с помощью хи-квадрат критерия проверяется гипотеза о фиксированном нормальном распределении и о принадлежности распределений к классу нормальных распределений; тогда p-value будет больше для первой гипотезы.
8. Рассматривается выборка объёмом 5 с выборочной дисперсией 15 и выборочным средним 5. Проверить гипотезу о равенстве дисперсии 14 при альтернативе о отсутствии равенства.
9. Рассматривается выборка объёмом 5 с выборочной дисперсией 15 и выборочным средним 5. Определить p-value для гипотезы о том, что математическое ожидание не меньше 3 при альтернативе о том, что ожидание больше.
10. При проверке гипотезы о фиксированном распределении значение хи-квадрат статистики, построенной по 100 наблюдениям, разбитым на 5 интервалов, оказалось равно 6; примерно определить, на каких уровнях значимости гипотеза о распределении не была бы отвергнута.
11. Проверяется гипотеза о независимости двух дискретных случайных величин, причём первая случайная величина принимает значения 0 и 1, а вторая 0, 1 и 2; выборка состоит из 100 наблюдений, значение (0;0) в выборке встречалось 20 раз, (0;1) 10 раз, (1;0) 5 раз, (1;1) 20 раз, (0;2) 30 раз, (1;2) 15 раз; проверить гипотезу о независимости.
12. Рассматривается двумерная выборка (2;3), (1;2), (0;5), (4;4); вычислить ранговый коэффициент корреляции Кендалла.
13. Рассматривается выборка объёмом 5 с выборочной дисперсией 15 и выборочным средним 5; проверить гипотезу о равенстве ожидания 4 при альтернативе о равенстве 6; определить вероятность ошибки второго рода.
14. Проверяется гипотеза о равномерном распределении с нулевой левой границей для выборки из чисел 0.1, 0.2, 0.5, 0.4, 0.3, 0.6, 0.6, 0.8. Проверить гипотезу, разбив область на два интервала.
15. Предложить формулу для вычисления рангового коэффициента корреляции Спирмена по известной двумерной плотности.

Рассматривается выборка объёмом 5 с выборочной дисперсией 15 и выборочным средним 5; проверить гипотезу о равенстве ожидания 4 при альтернативе о равенстве 6; определить вероятность ошибки второго рода.

5.3. Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к экзамену 1

1. Основные определения.
случайный эксперимент, элементарные события, события, операции над событиями, несовместные события, невозможное событие, достоверное событие
2. Подходы к понятию вероятности.
статистическая вероятность и её свойства, классическая вероятность, схема равновозможных исходов, свойства классической вероятности, геометрическая вероятность и её свойства
3. Аксиоматическое определение вероятности.
алгебра событий и её свойства, недостаточность понятия алгебры, сигма-алгебра событий и её свойства, примеры сигма-алгебр, сигма-алгебра, порождённая набором событием, борелевская сигма-алгебра, вероятность и её свойства, равносильность аксиомы непрерывности и аксиомы счётной аддитивности, вероятностное пространство, теорема Каратеодори (без доказательства)
4. Условная вероятность.
условная вероятность и её свойства, формула умножения вероятностей, формула полной вероятности, теорема Байеса, попарная независимость событий, независимость событий в совокупности и их неравносильность
5. Схема Бернулли и предельные теоремы.
схема Бернулли, теорема Пуассона, локальная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства), интегральная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства)
6. Случайные величины.
случайная величина, измеримая случайная величина, функция распределения случайной величины и её свойства, дискретные случайные величины, закон распределения и его свойства, непрерывные случайные величины, плотность случайной величины и её свойства
7. Случайные вектора.
случайный вектор, функция распределения случайного вектора и её свойства, дискретный случайный вектор, закон распределения и его свойства, непрерывный случайный вектор, плотность распределения случайного вектора, независимые случайные величины, функция распределения и плотность распределения суммы случайных величин
8. Характеристики случайных величин.
математическое ожидание случайной величины и его свойства, среднее отклонение случайной величины, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины и их свойства, ковариация и коэффициент корреляции случайных величин и их свойства, квантили случайной величины, медиана случайной величины, моменты случайной величины, характеристики функции от случайной величины

9. Производящая функция моментов.
производящая функция моментов и её свойства

Перечень вопросов к экзамену 2

10. Избранные распределения.
распределение Бернулли и его свойства, биномиальное распределение и его свойства, распределение Пуассона и его свойства, геометрическое распределение и его свойства, равномерное распределение и его свойства, экспоненциальное распределение и его свойства, нормальное распределение и его свойства, многомерное нормальное распределение и его свойства (без доказательства)
11. Неравенства и теоремы.
неравенство Чебышева, закон больших чисел и его частные случаи, центральная предельная теорема (эскиз доказательства), виды сходимости случайных величин
12. Условная функция распределения, условная плотность распределения, условное математическое ожидание, условная дисперсия, их свойства.
13. Случайная выборка. Эмпирическая функция распределения. Эмпирическая плотность распределения. Сходимость эмпирических функций распределения и плотностей распределения.
14. Оценки параметров. Несмещённые оценки. Состоятельные оценки. Эффективные оценки. Неравенство Рао-Крамера.
15. Среднее значение как оценка математического ожидания, её свойства. Выборочная дисперсия как оценка дисперсии, её свойства. Выборочный коэффициент корреляции.
16. Оценка параметров: метод максимального правдоподобия и его свойства.
17. Доверительные интервалы. Доверительный интервал для математического ожидания при известной и неизвестной дисперсиях (двусторонний и односторонний). Доверительный интервал для разности математических ожиданий (случаи зависимых и независимых выборок).
18. Проверка гипотез. Ошибки первого и второго рода. p-value. Критерий хи-квадрат для гипотезы о распределении. Проверка гипотез о математическом ожидании (двусторонних и односторонних), проверка односторонних гипотез о математическом ожидании.
19. Регрессионный анализ. Постановка задачи. Предпосылки простой линейной регрессии. Оценка параметров линейной модели. Коэффициент детерминации. Свойства оценок параметров линейной модели. Проверка гипотез о коэффициентах (критерий Стьюдента и критерий Фишера). Доверительные интервалы для коэффициентов линейной регрессии. Теорема Гаусса-Маркова. Геометрическая интерпретация МНК.

6. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Процедура оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенции*(ий)*, представлена паспортом фонда оценочных средств по дисциплине (раздел 1).

Комплект оценочных средств хранится на кафедре, подлежит обновлению по мере необходимости. Для промежуточной аттестации в виде экзамена каждое ОС по дисциплине обновляется и утверждается за 14 дней до начала сессионного периода и хранится в недоступном месте от несанкционированного доступа. Ответственность несет кафедра.

Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся Университета по ОПОП регламентируются Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Текущий контроль успеваемости в Университете является формой контроля качества знаний обучающихся, осуществляемого в межсессионный период обучения с целью определения качества освоения ОПОП.

Текущий контроль успеваемости осуществляется: на лекциях, практических (семинарских) занятиях, в рамках контроля самостоятельной работы.

Обучающиеся заранее информируются о критериях и процедуре текущего контроля успеваемости преподавателями по соответствующей учебной дисциплине (модуля).

Успеваемость при текущем контроле характеризует объем и качество выполненной обучающимся работы по дисциплине (модулю).

Педагогические виды и формы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости обучающихся, определяются методической комиссией кафедры. Выбираемый вид текущего контроля обеспечивает наиболее полный и объективный контроль (измерение и фиксирование) уровня освоения результатов обучения по дисциплине.

Преподаватели предоставляют сведения о текущей успеваемости обучающихся в рамках проведения текущей аттестации в семестре в деканаты/ учебный отдел института в сроки, определенные внутренними распорядительными документами Университета (факультета, *института*).

В целях обеспечения текущего контроля успеваемости преподаватель проводит консультации.

Преподаватель, ведущий занятия семинарского типа, проводит **аттестацию обучающихся за прошедший период**. Аттестация проводится, если проведено не менее 3 практических (семинарских) или лабораторных занятий, в установленные деканатом/ институтом сроки, не реже 1 раза за учебный семестр. Обучающиеся аттестуются путем выставления в соответствующую групповую ведомость записей по системе: «аттестован» или «не аттестован».

Преподаватель, проставляя итоги аттестации, доводит результаты аттестации до сведения студенческой группы и объясняет причины отрицательной аттестации по запросу обучающегося.

При аттестации обучающихся учитываются следующие факторы:

– результаты работы на занятиях, показанные при этом знания по дисциплине (модулю), усвоение навыков практического применения теоретических знаний, степень активности на практических (семинарских) занятиях;

– результаты и активность участия в семинарах и коллоквиумах;

– результаты выполнения контрольных работ;

– результаты и объем выполненных заданий в рамках самостоятельной работы обучающихся;

– результаты личных бесед со студентами по материалу учебной дисциплины (модуля);

– посещение студентами, семинарских и практических занятий, лабораторных работ;

– своевременная ликвидация задолженностей по пройденному материалу, возникших вследствие пропуска занятий либо неудовлетворительных оценок по результатам работы на занятиях.

– результаты прохождения контрольных точек по дисциплине (при использовании балльно-рейтинговой системы)

Промежуточная аттестация обучающихся Университета является формой контроля результатов обучения по дисциплине с целью комплексного определения соответствия уровня и качества знаний, умений и навыков обучающихся требованиям, установленным образовательной программой.

Формирование оценки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины осуществляется с использованием балльно-рейтинговой системы оценки знаний обучающихся, требования к которым изложены в Положении о балльно-рейтинговой системе.

7. Особенности освоения дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями

Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и **при необходимости обеспечивающих коррекцию нарушений развития и социальную адаптацию указанных лиц**.

Самостоятельная работа обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов позволяет своевременно выявить затруднения и отставание и внести коррективы в учебную деятельность. Конкретные формы и виды самостоятельной работы обучающихся лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов устанавливаются преподавателем. Выбор форм и видов самостоятельной работы, обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов осуществляется с учетом их

способностей, особенностей восприятия и готовности к освоению учебного материала. Формы самостоятельной работы устанавливаются с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге или на компьютере, в форме тестирования, электронных тренажеров и т.п.).

Основные формы представления оценочных средств – в печатной форме или в форме электронного документа. Для обучающихся с нарушениями зрения предусматривается возможность проведения текущего и промежуточного контроля в устной форме. Для обучающихся с нарушениями слуха предусматривается возможность проведения текущего и промежуточного контроля в письменной форме.

Таблица 7.1. – Категории обучающихся с ОВЗ, способы восприятия ими информации и методы их обучения.

<table>
<tr><th colspan="2">Категории обучающихся по нозологиям</th><th>Методы обучения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">с нарушениями зрения</td><td>Слепые. Способ восприятия информации: осязательно-слуховой</td><td rowspan="2">Аудиально-кинестетические, предусматривающие поступление учебной информации посредством слуха и осязания.
Могут использоваться при условии, что визуальная информация будет адаптирована для лиц с нарушениями зрения:
визуально-кинестетические, предполагающие передачу и восприятие учебной информации при помощи зрения и осязания;
аудио-визуальные, основанные на представление учебной информации, при которых задействовано зрительное и слуховое восприятие;
аудио-визуально-кинестетические, базирующиеся на представлении информации, которая поступает по зрительному, слуховому и осязательному каналам восприятие.</td></tr>
<tr><td>Слабовидящие. Способ восприятия информации: зрительно-осязательно-слуховой</td></tr>
<tr><td rowspan="2">С нарушениям и слуха</td><td>Глухие. Способ восприятия информации: зрительно-осязательный</td><td rowspan="2">визуально-кинестетические, предполагающие передачу и восприятие учебной информации при помощи зрения и осязания.
Могут использоваться при условии, что аудиальная информация будет адаптирована для лиц с нарушениями слуха:
аудио-визуальные, основанные на представление учебной информации, при которых задействовано зрительное и слуховое восприятие;
аудиально-кинестетические, предусматривающие поступление учебной информации посредством слуха и осязания;
аудио-визуально-кинестетические, базирующиеся на представлении информации, которая поступает по зрительному, слуховому и осязательному каналам восприятие.</td></tr>
<tr><td>Слабослышащие. Способ восприятия информации: Зрительно-осязательно-слуховой</td></tr>
<tr><td>С нарушениям и опорно-двигательного аппарата</td><td>Способ восприятия информации: зрительно-осязательно-слуховой</td><td>– визуально-кинестетические;
– аудио-визуальные;
– аудиально-кинестетические;
– аудио-визуально-кинестетические.</td></tr>
</table>

Таблица 7.2. – Способы адаптации образовательных ресурсов.

Условные обозначения:

«+» —образовательный ресурс, не требующий адаптации;

«АФ» — адаптированный формат к особенностям приема-передачи информации обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ формат образовательного ресурса, в том числе с использованием специальных технических средств;

«АЭ»— альтернативный эквивалент используемого ресурса

Категории обучающихся по нозологиям		**Образовательные ресурсы**				
		Электронные				**Печатные**
		мультимедиа	**графические**	**аудио**	**текстовые, электронные аналоги печатных изданий**	
С нарушениями зрения	Слепые	АФ	АЭ (например, создание материальной модели графического объекта (3Dмодели)	+	АЭ (например, аудио описание)	АЭ (например, печатный материал, выполненный рельефно-точечным шрифтом Л.Брайля)
	Слабовидящие	АФ	АФ	+	АФ	АФ
С нарушениями слуха	Глухие	АФ	+	АЭ (например, текстовое описание, гипер-ссылки)	+	+
	Слабослышащие	АФ	+	АФ	+	+
С нарушениями опорно-двигательного аппарата		+	+	+	+	+

Таблица 7.3. - Формы контроля и оценки результатов обучения инвалидов и лиц с ОВЗ в СПбГЭУ

Категории обучающихся по нозологиям	**Форма контроля и оценки результатов обучения**
С нарушениями зрения	– *устная проверка:* дискуссии, тренинги, круглые столы, собеседования, устные коллоквиумы и др.; – *с использованием компьютера и специального ПО*: работа с электронными образовательными ресурсами, тестирование, рефераты, курсовые проекты, дистанционные формы, если позволяет острота зрения - графические работы и др.
С нарушениями слуха	– *письменная проверка:* контрольные, графические работы, тестирование, домашние задания, эссе, письменные коллоквиумы, отчеты и др.; – *с использованием компьютера и специального ПО:* работа с электронными образовательными ресурсами, тестирование, рефераты,

	курсовые проекты, графические работы, дистанционные формы и др.
С нарушениями опорно-двигательного аппарата	– *письменная проверка, с использованием специальных технических средств* (альтернативных средства ввода, управления компьютером и др.): контрольные, графические работы, тестирование, домашние задания, эссе, письменные коллоквиумы, отчеты и др.; – *устная проверка, с использованием специальных технических средств* (средств коммуникаций): дискуссии, тренинги, круглые столы, собеседования, устные коллоквиумы и др.; – *с использованием компьютера и специального ПО* (альтернативных средств ввода и управления компьютером и др.): работа с электронными образовательными ресурсами, тестирование, рефераты, курсовые проекты, графические работы, дистанционные формы - предпочтительнее обучающимся, ограниченным в передвижении и др.

7.1. Задания для текущего контроля для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями

Текущий контроль и промежуточная аттестация обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ осуществляется с использованием оценочных средств, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации, в том числе с использованием специальных технических средств.

Текущий контроль успеваемости для обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ направлен на своевременное выявление затруднений и отставания в обучении и внесения коррективов в учебную деятельность. Возможно осуществление входного контроля для определении его способностей, особенностей восприятия и готовности к освоению учебного материала.

7.2. Задания для промежуточной аттестации для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями

Форма промежуточной аттестации устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). При необходимости обучающимся предоставляется дополнительное время для подготовки ответа.

Промежуточная аттестация, при необходимости, может проводиться в несколько этапов. Для этого рекомендуется использовать рубежный контроль, который является контрольной точкой по завершению изучения раздела или темы дисциплины, междисциплинарного курса, практик и ее разделов с целью оценивания уровня освоения программного материала. Формы и срок проведения рубежного контроля определяются преподавателем (мастером производственного обучения) с учетом индивидуальных психофизических особенностей обучающихся.